

DYNAMICAL STABILITY PROBLEM OF A SPHERICAL SHELL UNDER CIRCUMFERENTIAL UNIFORMLY DISTRIBUTED SURFACE LOAD

Stefan Joniak

*Institute of Applied Mechanics of Technical University of Poznań
ul. Piotrowo 3, 60-965 Poznań, Poland
tel. +48 61 665-2337, fax: +48 61 665-2307
e-mail: stefan.joniak@put.poznan.pl*

Abstract

A thin-walled spherical shell, simply supported at one edge and closed by rigid diaphragm at the second edge, is subjected to acting of uniformly distributed surface load along parallel direction. The loading value increases linearly with time. The problem of dynamic stability of the shell is investigated. The set of equations describing the problem consists of nonlinear dynamic equilibrium equation and of nonlinear strain inseparability equation. Both the equations are solved by Bubnov-Galerkin method, assuming previously forms of deflection function and force function which fulfils the boundary conditions. The result of inseparability equation solving is delimitation of unknown coefficient of the force function. The solution of the equilibrium equation leads to the differential equation of the shell motion. This equation defines the relation between dimensionless amplitude of the deflection function and the load parameter. Coefficients of the equation have very complicated and extended form. The equation is finally solved by numerical Runge-Kutta method with previous calculation of the coefficient values and assuming the starting conditions of the problem. The results of the final solution are presented in the form of graphs: dimensionless amplitude vs. dimensionless time. They make the base to specify the critical load value taking into account required stability criterion.

Keywords: dynamical stability, geometric nonlinearity, spherical shell, circumferential surface load..

DYNAMICZNE ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI POWŁOKI KULISTEJ OBCIĄŻONEJ RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONĄ SIŁĄ POWIERZCHNIOWĄ O KIERUNKU RÓWNOLEŻNIKOWYM

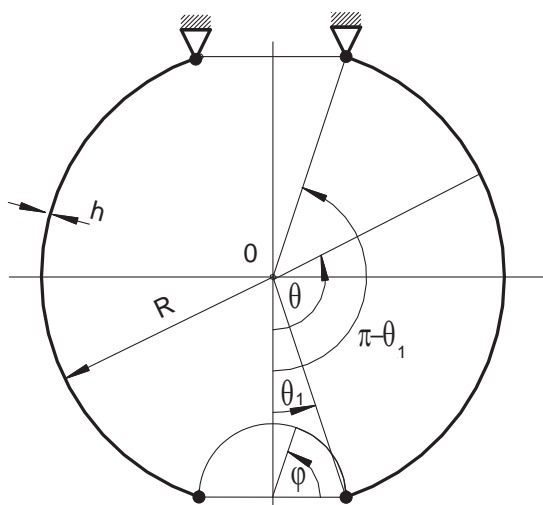
Streszczenie

Cienkościenna powłoka kulista jest podparta przegubowo na jednym brzegu, a na drugim zamknięta przeponą sztywną w swojej płaszczyźnie. Powłoka jest obciążona równomiernie rozłożoną siłą powierzchniową o kierunku równoleżnikowym, przy czym obciążenie to rośnie liniowo w czasie. Rozpatruje się zagadnienie stateczności dynamicznej powłoki. Układ równań zagadnienia tworzą nieliniowe równanie równowagi dynamicznej oraz nieliniowe równanie nierozdzielności. Oba równania rozwiązuje się metodą Bubnowa-Galerkina, przyjmując uprzednio postać funkcji ugięcia i funkcji sił, spełniające warunki brzegowe. Efektem rozwiązania równania nierozdzielności jest wyznaczenie nieznanego współczynnika tej funkcji. Rozwiązanie równania równowagi dynamicznej prowadzi do równania różniczkowego ruchu powłoki, mającego postać związku między bezwymiarową amplitudą funkcji ugięcia a parametrem obciążenia; współczynniki równania mają bardzo złożoną i rozbudowaną postać. Równanie to rozwiązuje się metodą Runge-Kutta, po uprzednim wyznaczeniu wartości jego współczynników i przyjęciu warunków początkowych zagadnienia. Wyniki rozwiązania mają postać wykresów we współrzędnych bezwymiarowa amplituda – bezwymiarowy czas. Na ich podstawie określa się - oparte o przyjęte kryterium utraty stateczności – obciążenie krytyczne.

Słowa kluczowe: stateczność dynamiczna, nieliniowość geometryczna, powłoka kulista, równoleżnikowa siła powierzchniowa

1. Wstęp

Cienkościenna powłoka kulista, która jest przedmiotem analizy, jest pokazana na rysunku 1. Górny jej brzeg jest podparty przegubowo, zaś dolny jest zamknięty przeponą sztywną w swojej płaszczyźnie. Rozpatrywane jest dynamiczne zagadnienie utraty stateczności powłoki obciążonej równomiernie rozłożoną siłą powierzchniową o kierunku równoleżnikowym; siła ta jest liniową funkcją czasu. Do rozwiązania problemu wykorzystano nieliniowe równania stateczności, podane w monografii [1], z których jedno (równanie równowagi) poszerzono o człon bezwładnościowy. Układ tych równań rozwiązywano metodą Bubnowa- Galerkina, zakładając najpierw postacie funkcji ugięcia po utracie stateczności i funkcji sił, natomiast otrzymane ostatecznie równanie różniczkowe ruchu powłoki metodą Runge-Kutta. Rozwiązania równania ruchu uzyskiwano w postaci wykresów we współrzędnych bezwymiarowa amplituda funkcji ugięcia – bezwymiarowy czas.



Rys. 1. Schemat powłoki
Fig. 1. Scheme of the shell

2. Równania zagadnienia stateczności dynamicznej

Układ równań stateczności ma następującą postać:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = E h \left(\kappa_{12}^2 - \kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{11} k_{22} - \kappa_{22} k_{11} \right), \quad (1)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + 2\bar{S} \kappa_{12} + T_1 (k_{11} + \kappa_{11}) + 2S \kappa_{12} + T_2 (k_{22} + \kappa_{22}) + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

gdzie: Ψ - funkcja sił,

w - funkcja ugięcia po utracie stateczności,

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \left(\text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right),$$

k_{ii} - główne krzywizny,

κ_{ii}, κ_{12} - zmiany krzywizn i skręcenie powierzchni,

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} - \text{sztywność zginania powłoki},$$

\bar{S} - siła styczna stanu przedkrytycznego,

T_i, S - siły stanu krytycznego,
 γ/g - masa właściwa materiału powłoki,
 t - czas.

Zmiany krzywizn i skręcenie powierzchni powłoki kulistej są następującymi funkcjami ugięcia:

$$\kappa_{11} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \kappa_{22} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \kappa_{12} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left(\text{ctg} \theta \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \theta} \right). \quad (3)$$

Siły stanu krytycznego zależą w następujący sposób od funkcji sił:

$$T_1 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right), T_2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, S = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left(\text{ctg} \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi \partial \theta} \right). \quad (4)$$

Siła styczna stanu przedkrytycznego ma postać:

$$\bar{S} = s_o R \frac{\theta - \theta_1 - 0,5(\sin 2\theta - \sin 2\theta_1)}{2 \sin^2 \theta}. \quad (5)$$

Zmiany krzywizn (3) i siły przekrojowe (4), (5) należy wprowadzić do równań (1) i (2). Otrzymujemy wtedy układ nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych ze względu na w i Ψ .

3. Rozwiązanie równań stateczności dynamicznej

Równania stateczności dynamicznej rozwiązywano metodą Bubnowa-Galerkina. Pociągało to za sobą konieczność przyjęcia postaci funkcji ugięcia i funkcji sił spełniających w miarę możliwości wszystkie warunki brzegowe zagadnienia. Na brzegach powłoki mamy następujące warunki brzegowe:

$$\theta = \theta_1; w = 0, M_\theta = 0, S = 0, T_1 = 0, \quad (6)$$

$$\theta = \pi - \theta_1; w = 0, M_\theta = 0, S = s_o R \frac{\pi - 2\theta_1 + \sin 2\theta_1}{2 \sin^2 \theta_1}, T_1 = 0. \quad (7)$$

Przyjęto funkcje sił i ugięcia o postaci:

$$\Psi = b(\varphi - 2\pi \sin^2 m\varphi) \sin^2 \theta, \quad (8)$$

$$w = a(t) \sin \left[\frac{\pi(\theta - \theta_1)}{\pi - 2\theta_1} \right] \sin \left[\frac{\pi(\theta - \theta_1)}{\pi - 2\theta_1} + m\varphi \right] \sin^2 \theta, \quad (9)$$

gdzie: b - stała,

$a(t)$ - amplituda funkcji ugięcia zależna od czasu,

m - liczba całkowita.

Funkcja ugięcia (9) spełnia ściśle pierwsze z warunków (6) i (7), drugie natomiast w sensie całkowym. Funkcja sił spełnia trzecie warunki na obu brzegach z dokładnością do stałej. Oba warunki na siłę normalną T_1 spełnione są w sensie całkowym.

Równanie nierozdzielności (1) rozwiązywano metodą Bubnowa-Galerkina. Funkcja podlegająca ortogonalizacji ma wtedy postać:

$$F(\theta, \varphi) = \nabla^2 \nabla^2 \Psi - E h \left(\kappa_{12}^2 - \kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{11} k_{22} - \kappa_{22} k_{11} \right),$$

natomiast warunek ortogonalizacji

$$\int_A F(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi) dA = 0, \quad (10)$$

gdzie: $f(\theta, \varphi)$ - czynnik ortogonalizujący, którym jest prawa strona równania (8) bez współczynnika b ,

A – powierzchnia środkowa powłoki.

Warunek ortogonalizacji przedstawia się ostatecznie następująco:

$$\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi) (\varphi - 2\pi \sin^2 m\vartheta) \sin^3 \theta d\theta d\varphi = 0, \quad (11)$$

Wynikiem rozwinięcia warunku (11) jest równanie algebraiczne, z którego wyznacza się współczynnik funkcji sił Ψ . Przedstawia go wyrażenie:

$$b = E h H a^2(t), \quad (12)$$

gdzie: H - stała zawierająca θ_1 i liczbę m .

Rozwiązanie równania (1) ma ostatecznie postać:

$$\Psi = E h a^2(t) H (\varphi - 2\pi \sin^2 m\vartheta) \sin^2 \theta. \quad (13)$$

Zastosowanie metody Bubnowa-Galerkina do równania równowagi dynamicznej (2) wymaga oznaczenia jego lewej strony jako funkcji podlegającej ortogonalizacji i zapisania warunku ortogonalizacji. Funkcja podlegająca ortogonalizacji to:

$$G(\theta, \varphi) = D \nabla^2 \nabla^2 w + 2 \bar{S} \kappa_{12} + T_1 (k_{11} + \kappa_{11}) + 2 S \kappa_{12} + T_2 (k_{22} + \kappa_{22}) + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

warunek ortogonalizacji ma postać:

$$\int_A G(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) dA = 0,$$

przy czym $g(\theta, \varphi)$ jest czynnikiem ortogonalizującym odpowiadającym prawej stronie funkcji ugięcia (9). Ostatecznie warunek ortogonalizacji przedstawia się następująco:

$$\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \int_0^{2\pi} G(\theta, \varphi) \sin \left[\frac{\pi(\theta-\theta_1)}{\pi-2\theta_1} \right] \sin \left[\frac{\pi(\theta-\theta_1)}{\pi-2\theta_1} + m\varphi \right] \sin^3 \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (14)$$

Rozwiązanie warunku ortogonalizacyjnego (14) prowadzi do następującego równania różniczkowego ruchu powłoki:

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + L_1 \zeta + L_2 s \zeta + L_3 \zeta^3 = 0, \quad (15)$$

gdzie: $\zeta = \frac{a}{h}$ - bezwymiarowa amplituda funkcji ugięcia,

$\tau = t \sqrt{\frac{g E h^2}{\gamma R^4}}$ - bezwymiarowy czas,

$s = \frac{s_o}{E} \frac{R^3}{h^3}$ - bezwymiarowy parametr obciążenia powierzchniowego,

L_i - stałe zależne od kąta θ_1 , liczby m i liczby Poissona.

Obciążenie powłoki, czyli równoleżnikowa siła powierzchniowa, zmienia się w czasie. Przyjęto, że bezwymiarowy parametr obciążenia powierzchniowego jest następującą funkcją czasu:

$$s = c \tau, \quad (16)$$

gdzie: c - prędkość obciążenia.

Równanie ruchu powłoki można rozwiązać tylko w sposób przybliżony. Wykorzystano do tego celu metodę Runge-Kutta. Stosowano warunki początkowe:

$$\tau = 0; \quad \zeta = f_0, \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = 0. \quad (17)$$

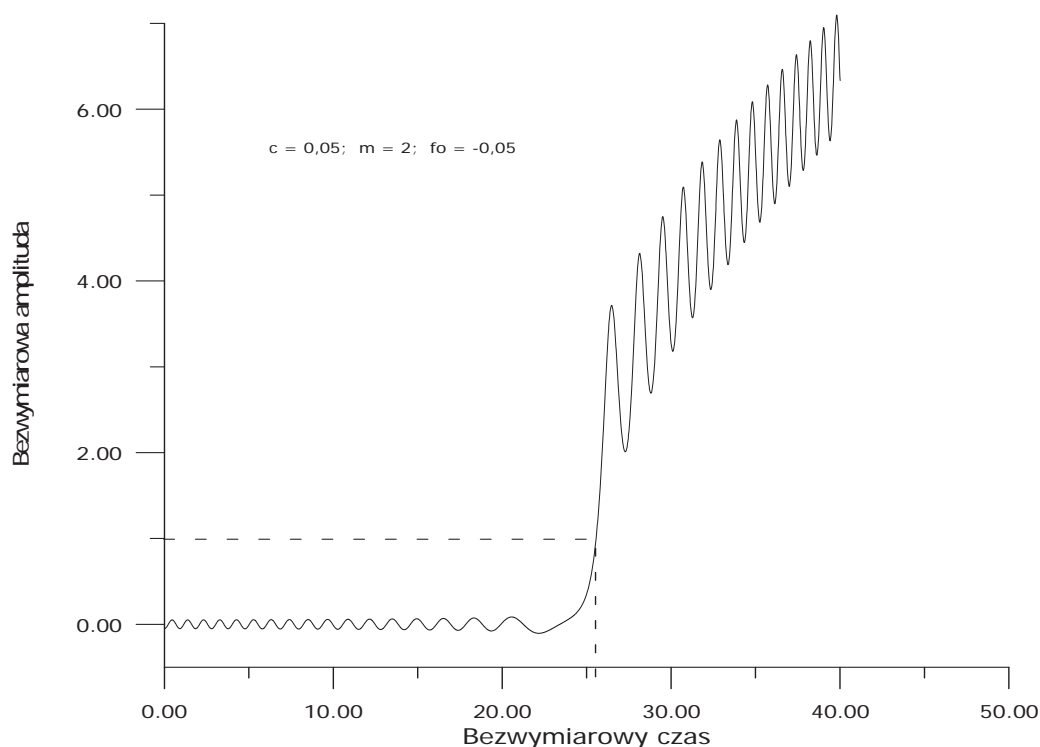
4. Przykład liczbowy i wnioski

Do rozwiązania metodą Runge-Kutta równania ruchu powłoki (15) potrzebne są wartości stałych L_i . Wartości tych stałych dla wybranych wartości θ_1 przy $\nu = 0,3$ podano w tabelicy 1. Należy zaznaczyć, że równanie (17) nie ma rozwiązań dla θ_1 o wartościach $\pi/6, 3\pi/10, 5\pi/14$, co wynika z przyjętej postaci funkcji ugięcia i funkcji sił.

Celem rozwiązania zagadnienia stateczności jest wyznaczenie obciążenia krytycznego. Przyjęto następujące kryterium utraty stateczności [2] : *powłoka traci stateczność, gdy bezwymiarowa amplituda ugięcia osiąga wartość odpowiadającą grubości, czyli przy $\zeta = 1$* . Obciążenie krytyczne jest wtedy określane następująco:

$$s_{kr} = c \tau_{kr}, \quad (18)$$

gdzie: τ_{kr} - czas krytyczny.



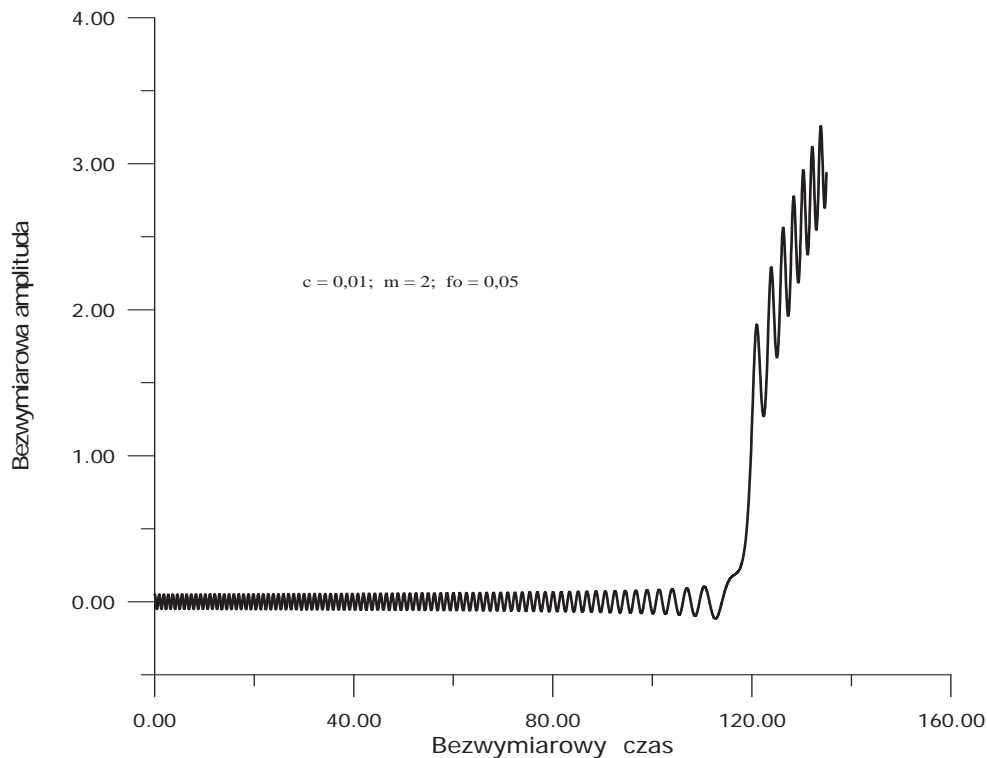
Rys. 2. Sposób wyznaczenia τ_{kr}

Fig. 2. Geometric illustration of the critical time

Czas krytyczny wyznacza się z wykresów we współrzędnych $\zeta - \tau$, uzyskiwanych z rozwiązań równania (15) przy ustalonych wymiarach powłoki, dla różnych wartości liczby m . Jest to najkrótszy czas potrzebny do osiągnięcia przez bezwymiarową amplitudę ugięcia wartości równej 1. Wartość liczby m wyznaczająca czas krytyczny to wartość krytyczna tej liczby - m_{kr} ; liczba ta określa formę utraty stateczności. Sposób wyznaczania czasu krytycznego pokazano na rysunku 2.

Tab. 1. Współczynniki równania ruchu
Tab. 1. The coefficients of the equation of motion

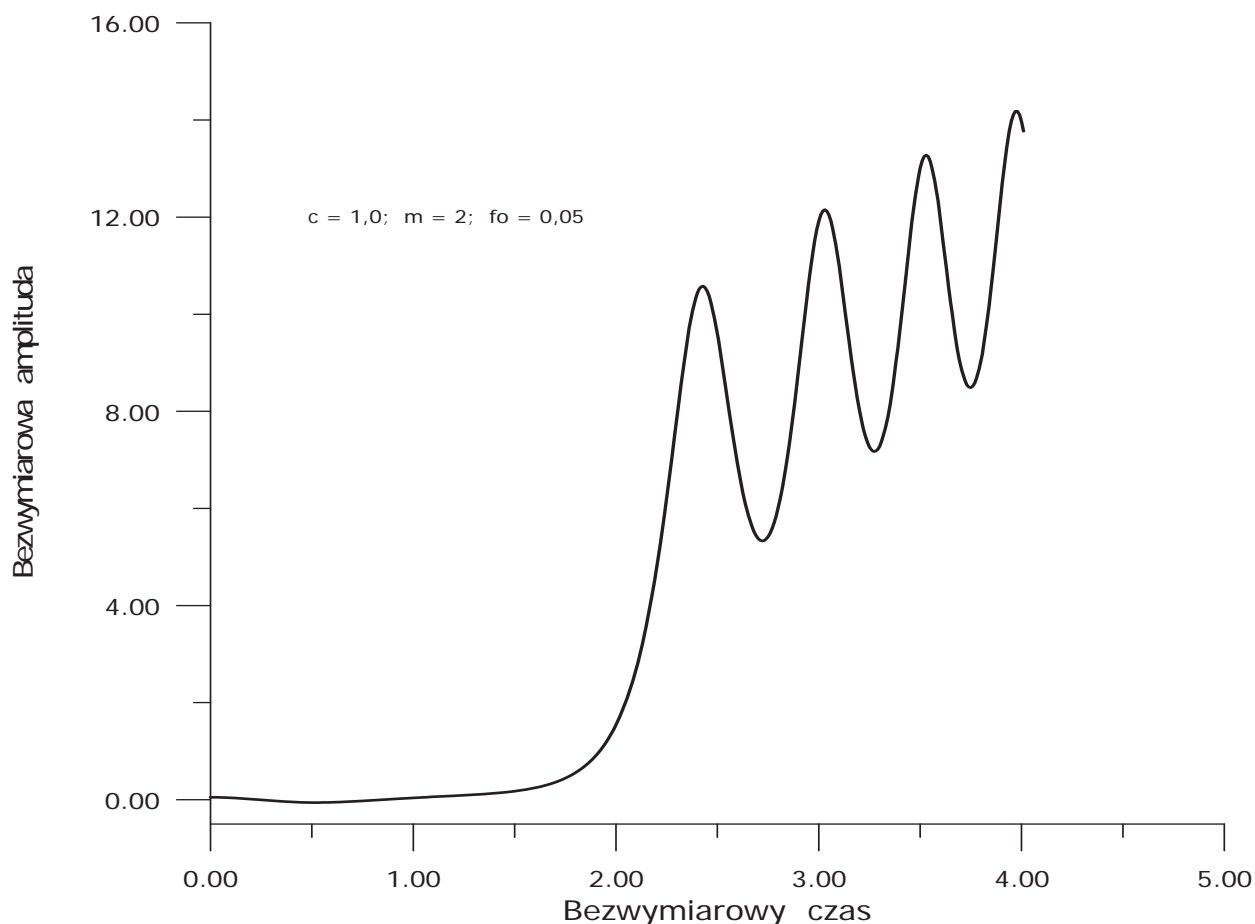
m	L_1		L_2		L_3	
	$\theta_1 = \pi/12$	$\theta_1 = \pi/5$	$\theta_1 = \pi/12$	$\theta_1 = \pi/5$	$\theta_1 = \pi/12$	$\theta_1 = \pi/5$
1	2,77314	7,73561	2,31230	2,70956	0,0709104	0,0445073
2	5,38475	11,7654	4,62460	5,41913	0,0920874	0,103314
3	14,7143	22,9132	6,93691	8,12870	0,0923376	0,110917
4	38,2273	47,8263	9,24921	10,8382	0,0922528	0,113219
5	86,3751	95,8107	11,5615	13,5478	0,0921870	0,114221
6	172,595	178,831	13,8738	16,2574	0,0921445	0,114747



Rys. 3. Przebieg zjawiska przy $c = 0,01$
Fig. 3. Dynamical path of motion ($c = 0,01$)

Na rysunkach 3 i 4 pokazano rozwiązania równania (17) dla różnych prędkości obciążenia (rozwiązania pokazane na rysunkach 2, 3 i 4 sporządzono dla $\theta_1 = \pi/12$ i $f_o = \pm 0,05$; wartości liczby m podane na tych rysunkach to wartości m_{kr}). Jak z rysunku 3 widać proces utraty stateczności przy prędkości $c = 0,01$ rozpoczyna się drganiami o wzrastającej stopniowo amplitudzie. Gdy amplituda osiągnie potrzebną wartość następuje jej gwałtowny wzrost

i powłoka traci stateczność zgodnie z przyjętym kryterium. Po okresie gwałtownego wzrostu amplitudy powłoka ponownie wpada w drgania; są to drgania nieliniowe. Podobnie zjawisko przebiega przy $c = 0,1$. Nieco odmiennie przedstawia się to przy prędkości $c = 1,0$. Ruch jest tu na początku ruchem nieokresowym (rys. 4), potem następuje gwałtowny wzrost ugięcia powłoki i utrata stateczności, a następnie pojawiają się nieliniowe drgania.



Rys. 4. Przebieg zjawiska przy $c = 1,0$
 Fig. 4. Dynamical path of the motion ($c = 1,0$)

Aby ocenić wpływ wymiarów powłoki oraz prędkości obciążenia na wartość obciążenia krytycznego rozwiązywano równanie (15) dla różnych wartości tych wielkości. Wyniki obliczeń zamieszczono w tablic 2 (liczby stojące w nawiasach przy wartościach momentów krytycznych to liczby m_{kr})

Tab. 2. Wartości obciążeń krytycznych ($f_o = \pm 0,05$)
 Tab. 2. Values of the critical load ($f_o = \pm 0,05$)

θ_1	S_{kr}		
	$c = 0,01$	$c = 0,1$	$C = 1,0$
$\pi/12$	1,20 (2)	1,34 (2)	1,92 (2)
$\pi/5$	2,21 (2)	2,34 (2)	2,86 (2)

Z porównania wartości bezwymiarowego parametru obciążenia krytycznego zamieszczonych w tablic 2 wynikają następujące wnioski:

- wartość obciążenia krytycznego wzrasta wraz ze wzrostem prędkości obciążenia,
- wzrost kąta θ_1 zwiększa odporność powłoki na utratę stateczności.

Literatura

- [1] Musztari, G., M., Galimow, K., Z., *Nielinieijnaja tieoria uprugich oboloczek*, Tatknigizdat, Kazań 1957.
- [2] Wolmir, A., S., *Nielinieijnaja dinamika plastinok i oboloczek*, Izd. „Nauka”, Moskwa 1972.
- [3] Joniak, S., *Nonlinear stability problem of spherical shell loaded with torque*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 41, 3, pp. 537-544, Warsaw 2003.
- [4] Joniak, S., *Energetic method of solving the stability problem of a semi-spherical shell loaded with torque*, Journal of theoretical and Applied Mechanics, 42, 2, pp 349-356, Warsaw 2004.